การประยุกต์ของอนุพันธ์ บทที่ 3

Applications of Differentiation

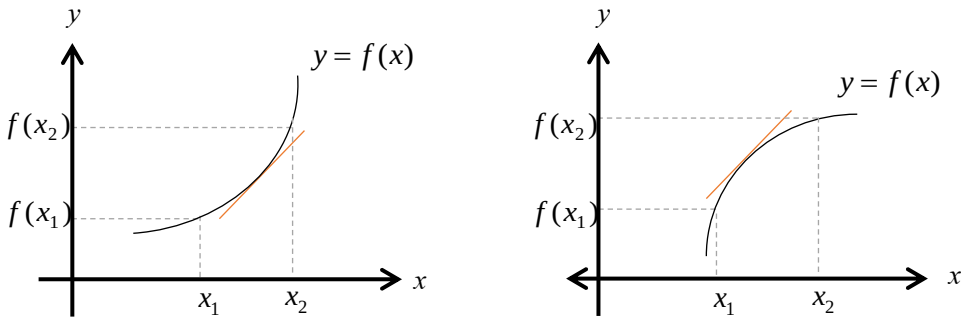
การประยุกต์อนุพันธ์สามารถใช้ได้ในศาสตร์หลากหลายด้านของการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ทั้งทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ ที่ใช้ในการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ เมื่อเทียบกับเวลา ในเศรษฐศาสตร์ใช้กับทางด้านอุปสงค์อุทาน การจ้างงาน และการวิเคราะห์รวมไปถึงทางด้านการเงินที่เชื่อมโยงความสัมพันธ์ต่อกันได้อย่างเป็นระบบโดยภาพรวม ทางด้านบริหารธุรกิจ ประยุกต์การคำนวณหาค่าผลกำไร ขาดทุน จุดคุ้มทุน จากค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน เป็นต้น

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. เข้าใจการประยุกต์ของอนุพันธ์ในหลายศาสตร์
2. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้
3. วิเคราะห์เชื่อมโยงความสัมพันธ์ต่อกันได้อย่างเป็นระบบ

3.1 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด (Increasing and decreasing functions)

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงใด ๆ เมื่อสำหรับทุกค่าระหว่าง x_1 และ x_2 ในช่วงนั้น ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$

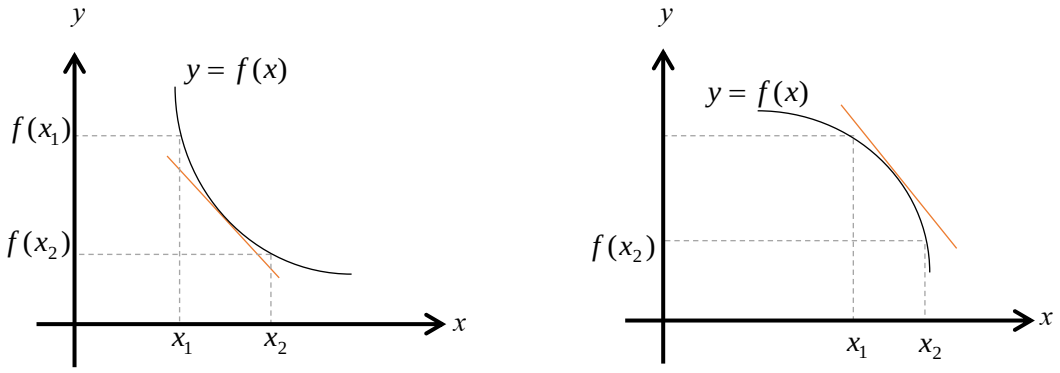


รูปที่ 3.1 ฟังก์ชันเพิ่ม

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป จะเห็นได้ว่า $x_1 < x_2$ และ $f(x_1) < f(x_2)$ จะได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่มีความชันเป็นบวกสำหรับทุก $x_1 < x < x_2$

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดในช่วงใด ๆ เมื่อสำหรับทุกค่าระหว่าง x_1 และ x_2 ในช่วงนั้น ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

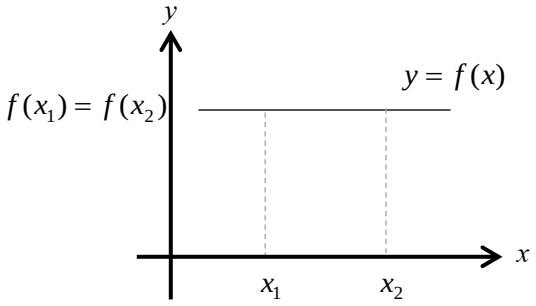


รูปที่ 3.2 ฟังก์ชันลด

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป จะเห็นได้ว่า $x_1 < x_2$ และ $f(x_1) > f(x_2)$ จะได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลด และเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่มีความชันเป็นลบสำหรับทุก $x_1 < x < x_2$

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว (Constant function) ในช่วงใด ๆ เมื่อสำหรับทุกค่าระหว่าง x_1 และ x_2 ในช่วงนั้น ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$

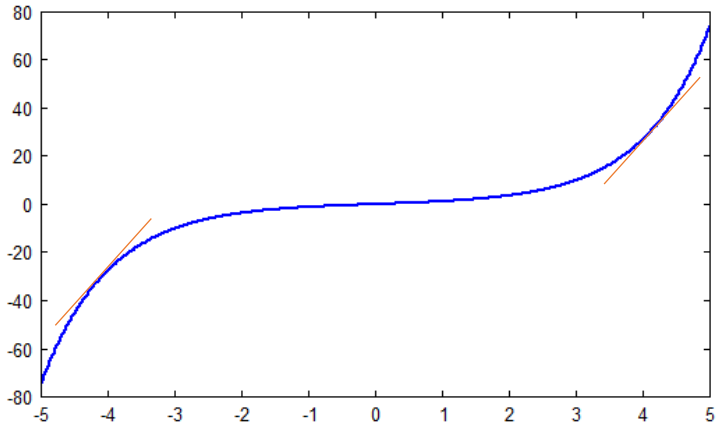


รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันค่าคงตัว

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

สำหรับทุกค่าระหว่าง x_1 และ x_2 จะได้ $f(x_1) = f(x_2)$ จะได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว

ตัวอย่าง 3.1 จากกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังรูป จงพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด หรือฟังก์ชันค่าคงตัวในช่วงใด ๆ



รูปที่ 3.4 กราฟของฟังก์ชันเพิ่ม

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จะได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $[-5,-1]$ และ $[1,5]$ และเป็นฟังก์ชันค่าคงตัวในช่วง $[-1,1]$ โดยสังเกตได้จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง

$[-5,-1]$

x	-5	-3	-1
y	-70	-10	0

และ $[1,5]$

x	1	3	5
y	0	10	70

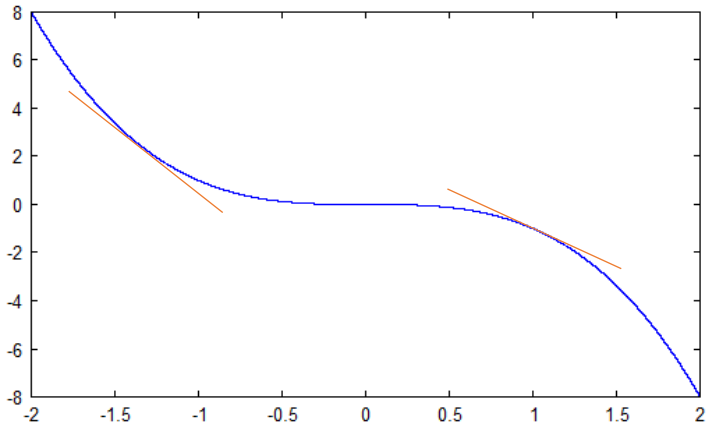
ฟังก์ชันเพิ่ม จะสังเกตได้ว่า ถ้าค่า x เพิ่ม แล้ว y เพิ่ม หรือ ถ้าค่า x ลด แล้ว y ลด ซึ่งจะเป็นไปในทิศทางเดียวกัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวในช่วง

$[-1,1]$

x	-1	0	1
y	0	0	0

ฟังก์ชันค่าคงตัว ไม่ว่า x จะเพิ่มหรือลด ค่า y มีค่าเท่าเดิมเสมอ

ตัวอย่าง 3.2 จากกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังรูป จงพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด หรือฟังก์ชันค่าคงตัวในช่วงใด ๆ



รูปที่ 3.5 กราฟของฟังก์ชันลด

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $[-2,2]$ โดยสังเกตได้จาก

x	-2	-1	0	1	2
y	8	1	0	-1	-8

ฟังก์ชันลดสังเกตได้ว่า ถ้าค่า x เพิ่ม แล้ว y ลด หรือ ถ้าค่า x ลด แล้ว y เพิ่ม ซึ่งจะเป็นไปในทิศทางตรงกันข้าม

3.2 จุดวิกฤต (Critical points)

จุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ จุดบนกราฟ ณ ที่ $x=c$ โดย $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้ รวมถึงกรณี $f'(c)=\infty$ ด้วย และจะเรียก $f(c)$ ว่าค่าวิกฤต (Critical value) ของฟังก์ชัน $f(x)$

<u>ขั้นตอนการหาจุดวิกฤต</u>

1. จากบทนิยาม คือ หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน โดย $f'(x)=0$
2. แก้สมการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้จุดวิกฤต ณ จุด x ใด ๆ

ตัวอย่าง 3.3 ถ้า $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 1$ จงหาจุดวิกฤตและค่าวิกฤตทั้งหมดของฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u> $f'(x) = 6x^2 - 12x - 18$

จากบทนิยาม $f'(x) = 0$

$$6x^2 - 12x - 18 = 0$$

$$6(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$6(x+1)(x-3) = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore \quad x = -1, 3$$

ค่าวิกฤต ณ ที่ $x = -1$ $\quad f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1)^2 - 18(-1) + 1$

$$= 2(-1) - 6 + 18 + 1$$

$$= 11$$

ค่าวิกฤต ณ ที่ $x = 3$ $\quad f(3) = 2(3)^3 - 6(3)^2 - 18(3) + 1$

$$= 2(27) - 6(9) - 54 + 1$$

$$= -53$$

ดังนั้น จุดวิกฤต 2 จุด คือ $(-1, 11)$ และ $(3, -53)$

ตัวอย่าง 3.4 ถ้า $f(x) = x\ln x - 1$ จงหาจุดวิกฤตและค่าวิกฤตทั้งหมดของฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ $x > 0$ เนื่องจากค่าหลัง log หรือ ln ต้องมีค่ามากกว่า 0

$$f'(x) = x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}(x) + \ln x$$

$$f'(x) = 1 + \ln x \qquad \text{เมื่อ } x > 0$$

จากบทนิยาม $f'(x) = 0$

$$1 + \ln x = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$e^{\ln x} = e^{-1}$$

$$x = e^{-1}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{e}$$

ค่าวิกฤต ณ ที่ $x = \frac{1}{e}$

$$f(x) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{e}\ln e^{(-1)} - 1$$

$$= \frac{1}{e}(-1) - 1$$

$$= -\frac{1}{e} - 1$$

ดังนั้น จุดวิกฤต คือ $= \left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e} - 1\right)$

3.3 ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน (Extreme value of function)

ค่าสุดขีดของฟังก์ชัน คือ ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน (Maximum and minimum of function)

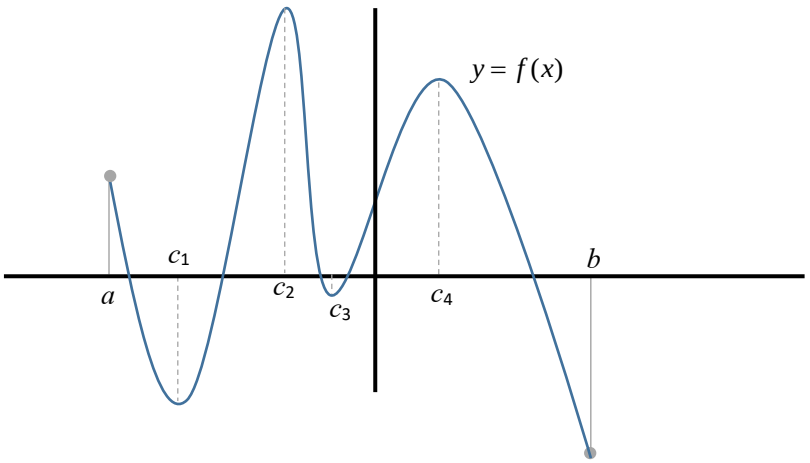
3.3.1 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน (Absolute maximum and minimum of function)

ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า x ในโดเมนของ f

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุกค่า x ในโดเมนของ f

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน สามารถเรียกได้ว่า “ค่าสุดขีดสัมบูรณ์” (Absolute extreme)

การพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยที่โดเมนของฟังก์ชัน f คือ สมาชิกทุกตัวหรือทุกค่าของ x อยู่ระหว่างค่า a และ b ดังรูป



รูปที่ 3.6 กราฟแสดงค่าสุดขีดสัมบูรณ์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากกราฟ

- ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(c_2)$ และจุดสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $(c_2, f(c_2))$
- ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $f(b)$ และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $(b, f(b))$

ข้อสังเกต ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันจะมีได้เพียงอย่างละ1 ค่าเท่านั้นในช่วงโดเมนของฟังก์ชัน f

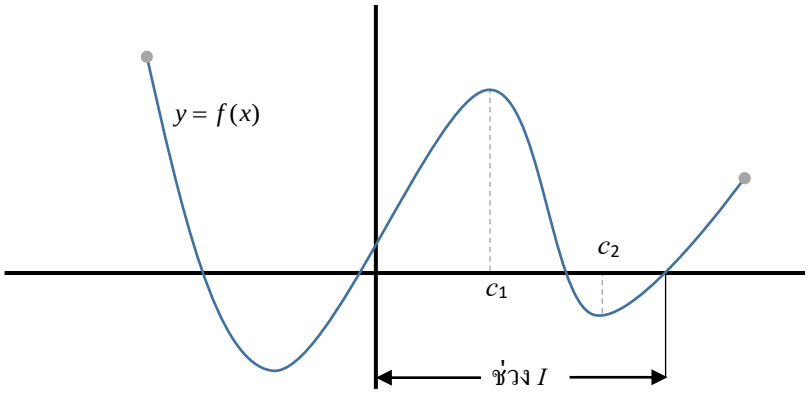
3.3.2 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน (Local or relative maximum and minimum of function)

ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า x ในช่วง I ช่วงหนึ่ง ๆ ของโดเมนของ f

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ เมื่อ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุกค่า x ในช่วง I ช่วงหนึ่ง ๆ ของโดเมนของ f

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน สามารถเรียกได้ว่า “ค่าสุดขีดสัมพัทธ์” (Local or relative extreme)

พิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยช่วง I ช่วงหนึ่ง ๆ ของโดเมนในฟังก์ชัน f ดังรูป



รูปที่ 3.7 กราฟแสดงค่าสุดขีดสัมพัทธ์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากกราฟ - ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_1)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_1, f(c_1))$

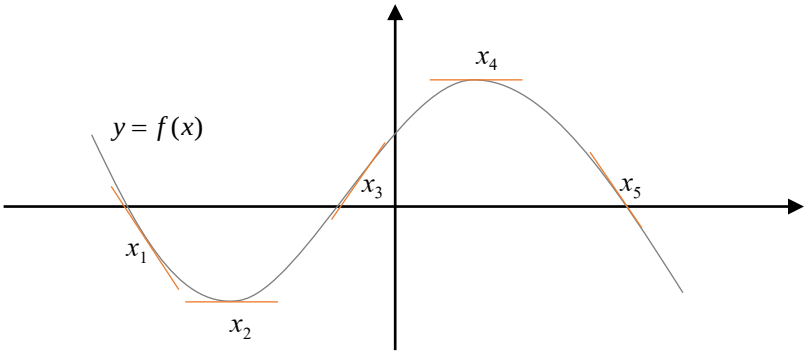
- ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_2)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_2, f(c_2))$

ข้อสังเกต ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ไม่จำเป็นต้องเป็นค่าสูงสุดที่แสดงอยู่ในกราฟและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ก็ไม่จำเป็นต้องเป็นค่าต่ำสุดที่อยู่ในกราฟเช่นกัน เนื่องจากสนใจในช่วง I ช่วงหนึ่งเท่านั้นในโดเมนของฟังก์ชัน f

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงใด ๆ และ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ระหว่างค่าในช่วงนั้น ๆ จะได้ว่า

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ระหว่างค่าในช่วงนั้น ๆ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงนั้น
2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ระหว่างค่าในช่วงนั้น ๆ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มลดช่วงนั้น
3. ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุกค่า x ระหว่างค่าในช่วงนั้น ๆ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วงนั้น

หมายเหตุ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน f หรือ $f'(x)$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสที่จุดใด ๆ นั้นเอง



รูปที่ 3.8 กราฟแสดงความชันของเส้นสัมผัส

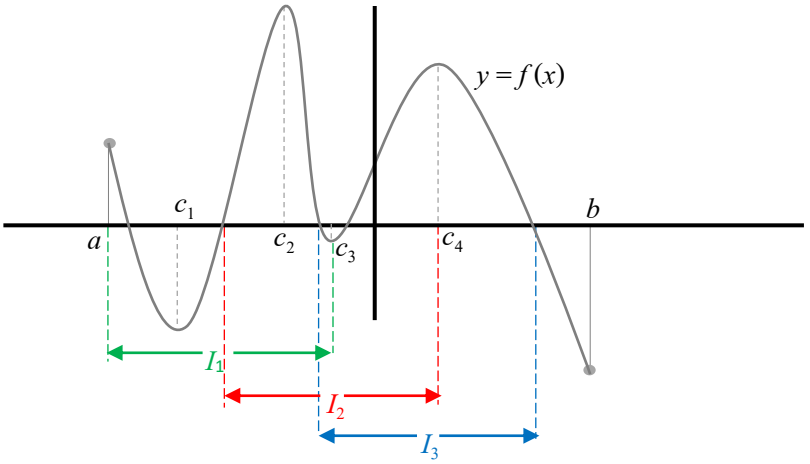
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป ให้จุด x_1, x_2, x_3, x_4 และ x_5 เป็นจุดของเส้นสัมผัสความชันบนเส้นโค้ง $y = f(x)$ โดยพิจารณาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งของจุดต่าง ๆ จะได้ว่า

- ที่จุด x_1 เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นค่าลบ และเส้นโค้งมีลักษณะดิ่งลง
- ที่จุด x_2 เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นศูนย์
- ที่จุด x_3 เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นค่าบวก และเส้นโค้งมีลักษณะดิ่งขึ้น
- ที่จุด x_4 เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นศูนย์
- ที่จุด x_5 เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเป็นค่าลบ และเส้นโค้งมีลักษณะดิ่งลง

โดยที่จุด x_2 จะเปลี่ยนจากโค้งลงเป็นโค้งขึ้น โดยให้ค่าต่ำสุด ณ จุดนั้น ซึ่งเปลี่ยนจากความชันลบไปเป็นบวกและ x_5 เปลี่ยนจากโค้งขึ้นเป็นโค้งลง โดยให้ค่าสูงสุด ณ จุดนั้น ซึ่งเปลี่ยนจากความชันบวกไปเป็นลบ

ตัวอย่าง 3.5 จงหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ในช่วง I_1 , I_2, I_3 และค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันในโดเมน f จากกราฟ



รูปที่ 3.9 กราฟแสดงค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ในช่วง I_1

- ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_2)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_2, f(c_2))$
- ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_1)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_1, f(c_1))$

ในช่วง I_2

- ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_2)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_2, f(c_2))$
- ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_3)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_3, f(c_3))$

ในช่วง I_3

- ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_4)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_4, f(c_4))$
- ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f(c_3)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_3, f(c_3))$

ในโดเมน f

- ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(c_2)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(c_2, f(c_2))$
- ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ $f(b)$ และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(b, f(b))$

3.3.3 การทดสอบหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

การหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน จะต้องมีเงื่อนไขโดยพิจารณาที่จุดวิกฤต ดังนิยามในหัวข้อ 3.2 ที่แสดงไว้ให้แล้ว โดยมี 2 วิธี คือ

1. <u>การพิจารณาของการเปลี่ยนเครื่องหมายโดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง</u>

- ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากค่าบวกไปเป็นค่าลบ แสดงว่าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ $f(c)$ ที่ $x=c$ โดยจากการแทนค่าใกล้ c จากทางซ้ายและทางขวาใน $f'(x)$
- ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจากค่าลบไปเป็นค่าบวก แสดงว่าฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ $f(c)$ ที่ $x=c$ โดยจากการแทนค่าใกล้ c จากทางซ้ายและทางขวาใน $f'(x)$
- ถ้า $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนเครื่องหมายจากค่าบวกไปเป็นค่าลบ หรือจากค่าลบไปเป็นค่าบวก แสดงว่าฟังก์ชัน f ไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ที่ $x=c$

หมายเหตุ การแทนค่าที่น้อยกว่าและมากกว่า c เพียงเล็กน้อยเท่านั้น

การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน โดยเริ่มจากการหาจุดวิกฤตและทำการพิจารณาค่าในแต่ละช่วงของ $f'(x)$ ทั้งทางด้านซ้ายและขวาของจุดวิกฤต

ขั้นตอนการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

1. จากบทนิยาม คือหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน โดย $f'(x)=0$
2. แก้สมการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้ค่าวิกฤต ณ จุด x ใด ๆ
3. พิจารณาค่าในแต่ละช่วงของ $f'(x)$

ตัวอย่าง 3.6 จงหาค่าและจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=2x^3+9x^2-24x+5$ และใช้โปรแกรม FreeMat ในการวาดกราฟ

<u>วิธีทำ</u> $f'(x)=6x^2+18x-24$

1. จากบทนิยาม $f'(x)=0$

$$6x^2+18x-24=0$$

หาร 6 ตลอดทั้งสมการ $\quad x^2+3x-4=0$

$$(x+4)(x-1)=0$$

$\therefore$ ค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤต คือ $\quad x = 1, -4$

ค่าวิกฤต ที่ $x=1$

$$f(1)=2(1)^3+9(1)^2-24(1)+5$$
$$=2(1)+9(1)-24+5$$
$$=2+9-24+5$$
$$=-8$$

ค่าวิกฤต ที่ $x=-4$

$$f(-4)=2(-4)^3+9(-4)^2-24(-4)+5$$
$$=2(-64)+9(16)+96+5$$
$$=-128+144+96+5$$
$$=115$$

ดังนั้น จุดวิกฤต 2 จุด คือ (1, -8) และ (-4, 115)

2. นำค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤตมาพิจารณาโดยการทดสอบการเปลี่ยนเครื่องหมายจากทางด้านซ้ายและขวาของจุดวิกฤต

- พิจารณา จุดวิกฤต (-4, 115)

$f'(x<-4) \qquad f'(x>-4)$

เลือกที่ใกล้ เช่น $\quad x=-5 \qquad x=-3$

$x=-4$

จาก $f'(x)=6(x+4)(x-1)$

$$f'(-5)=6(-5+4)(-5-1) \qquad f'(-3)=6(-3+4)(-3-1)$$
$$=(+)(-)(-) \qquad =(+)(+)(-)$$
$$=(+) \qquad =(-)$$

จะเห็นได้ว่าเครื่องหมายเปลี่ยนจากค่าบวกไปเป็นค่าลบ แสดงว่า ณ จุดวิกฤต ที่ $x=-4$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 116 และจุด (-4, 116) เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

- พิจารณา จุดวิกฤต $(1, -8)$

	$f'(x<1)$	$f'(x>1)$
เลือกที่ใกล้ คือ	$x=0$	$x=2$

1

จาก $f'(x) = 6(x+4)(x-1)$

$$f'(0) = 6(0+4)(0-1) \qquad f'(2) = 6(2+4)(2-1)$$

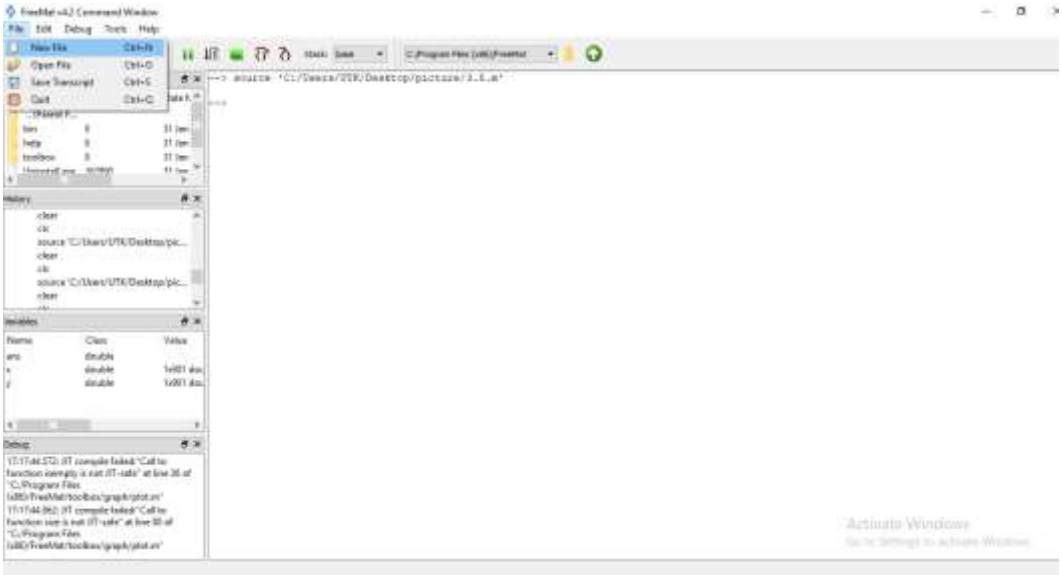
$$= (+)(+)(-) \qquad = (+)(+)(+)$$

$$= (-) \qquad = (+)$$

จะเห็นได้ว่าเครื่องหมายเปลี่ยนจากค่าลบไปเป็นค่าบวก แสดงว่า ณ จุดวิกฤต ที่ $x=1$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ -8 และจุด $(1, -8)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$ จากการใช้โปรแกรม FreeMat เพื่อสามารถใช้ในการตรวจสอบได้ว่าได้ทำการหาค่าหรือจุดต่าง ๆ ถูกต้องหรือไม่ โดยมีวิธีการดังนี้

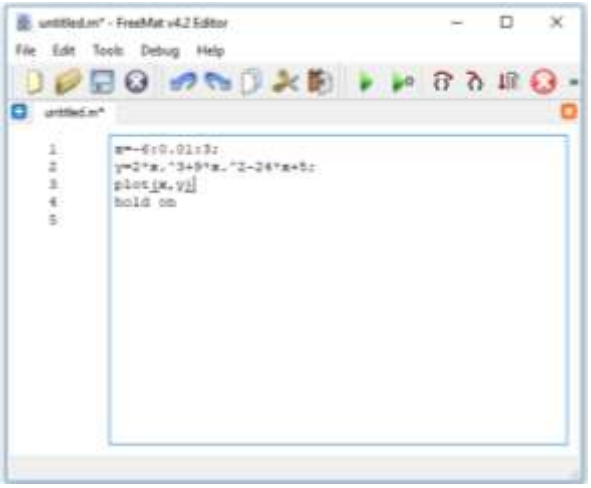
1. เปิดโปรแกรม FreeMat > New File ดังภาพ



รูปที่ 3.10 โปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

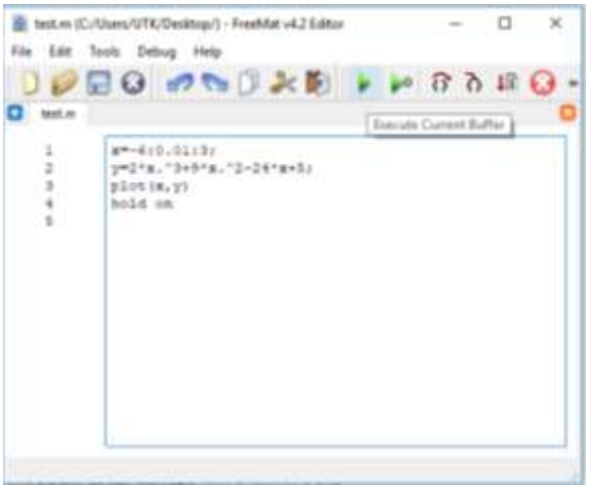
2. จะได้ดังภาพ และเขียนโปรแกรมสำหรับการสร้างกราฟ



รูปที่ 3.11 การประมวลผลของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

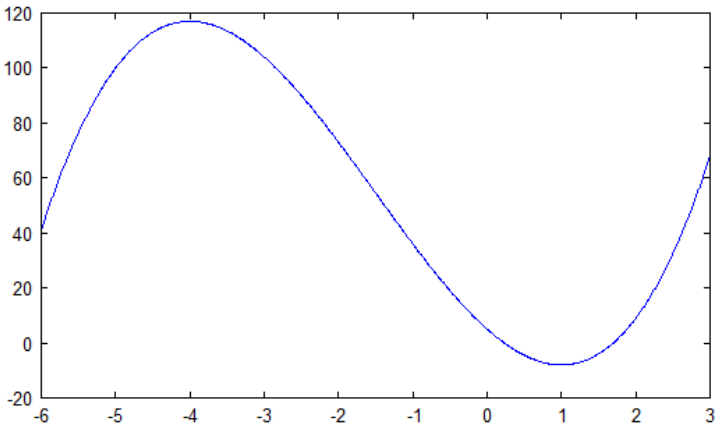
3. ทำการบันทึกไฟล์พร้อมตั้งชื่อและประมวลผลโปรแกรม save > save as > test.m > Execute



รูปที่ 3.12 การบันทึกไฟล์และประมวลผลของโปรแกรม FreeMat

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จะได้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=2x^3+9x^2-24x+5$



รูปที่ 3.13 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=2x^3+9x^2-24x+5$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 116 และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (-4, 116)

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ -8 และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ (1, -8)

ข้อดีจากการที่สร้างกราฟได้เอง คือ สามารถตรวจสอบคำตอบจากการคำนวณได้จากรูป

ตัวอย่าง 3.7 จงหาค่าและจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}$ และใช้โปรแกรม FreeMat ในการวาดกราฟ

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}-2\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\left(\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)-\frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{5x}{3x^{\frac{1}{3}}}-\frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}}\qquad=\frac{5x-4}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

1. จากบทนิยาม

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{5x-4}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0 \qquad \text{โดยที่ } x \neq 0$$

$$5x - 4 = 0$$

$$5x = 4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

2. เนื่องจาก $f'(0) =$ ไม่มีค่า เมื่อ $x = 0$ จะได้ $f(0) = 0$

$\therefore$ ค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤต $x = 0, \frac{4}{5}$

ค่าวิกฤต ที่ $x = 0$

$$f(0) = 0$$

ค่าวิกฤต ที่ $x = \frac{4}{5}$

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{5}{3}} - 2\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{5}{3}} - 2\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}} - 2\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{4}{5} - 2\right]$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{4}{5} - (2)\frac{5}{5}\right]$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{6}{5}\right)$$

$$= -\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

ดังนั้น จุดวิกฤต 2 จุด คือ (0, 0) และ $\left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$

3. นำค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤตมาพิจารณาโดยการทดสอบการเปลี่ยนเครื่องหมายจากทางด้านซ้ายและขวาของจุดวิกฤต

- พิจารณา จุดวิกฤต $(0, 0)$

	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
เลือกที่ใกล้ คือ	$x = -\frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$
	(-) 0	(-)

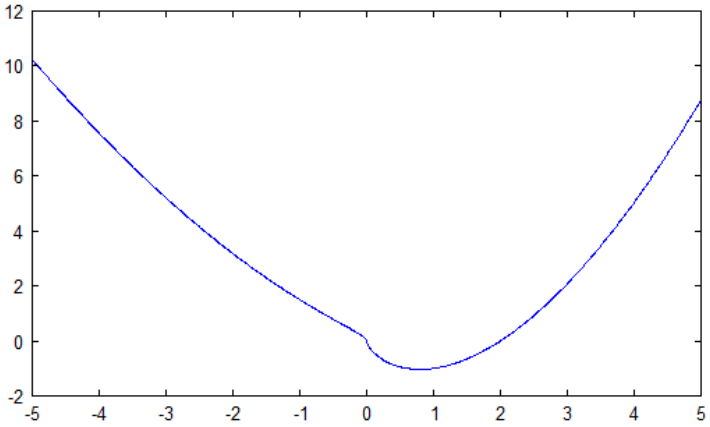
จะเห็นได้ว่าเครื่องหมายไม่เปลี่ยน แสดงว่า $f(x)$ ณ จุดที่ $x = 0$ ไม่มีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดที่ $x = 0$

- พิจารณา จุดวิกฤต $\left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$

	$f'(x) < \frac{4}{5}$	$f'(x) > \frac{4}{5}$
เลือกที่ใกล้ คือ	$x = \frac{1}{2}$	$x = 1$
	(-) $\frac{4}{5}$	(+)

จะเห็นได้ว่าเครื่องหมายเปลี่ยนจากค่าลบไปเป็นค่าบวก แสดงว่า ณ จุดวิกฤต ที่ $x = \frac{4}{5}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $-\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ และจุด $\left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}$ โดยใช้โปรแกรม FreeMat ในการวาดกราฟ



รูปที่ 3.14 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 3.8 จงหาค่าและจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^4 - 5$ และใช้โปรแกรม FreeMat ในการวาดกราฟ

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x) = 4x^3$$

1. จากบทนิยาม

$$f'(x) = 0$$
$$4x^3 = 0$$
$$x = 0$$

2. ค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤต $\therefore \quad x = 0$

ค่าวิกฤต ที่ $x = 0$

$$f(0) = 0^4 - 5$$
$$= -5$$

ดังนั้น จุดวิกฤต 1 จุด คือ (0, -5)

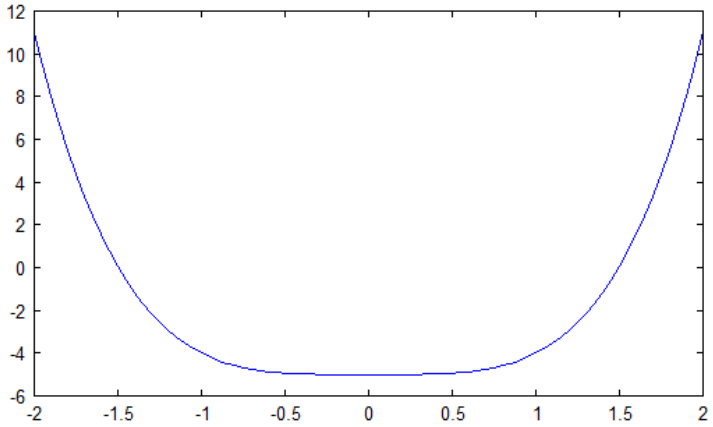
3. นำค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤตมาพิจารณาโดยการทดสอบการเปลี่ยนเครื่องหมายจากทางด้านซ้ายและขวาของจุดวิกฤต

- พิจารณา จุดวิกฤต (0, -5)

	$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$
เลือกที่ใกล้ คือ	$x = -1$		$x = 2$
	(-)	0	(+)

จะเห็นได้ว่าเครื่องหมายเปลี่ยนจากค่าลบไปเป็นค่าบวก แสดงว่า ณ จุดวิกฤต ที่ $x = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ -5 และจุด (0, -5) เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^4 - 5$ จะได้จากใช้โปรแกรม FreeMat ในการวาดกราฟ



รูปที่ 3.15 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^4 - 5$

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

2. <u>การหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันโดยอนุพันธ์อันดับที่สอง</u>

เป็นวิธีการที่ง่ายในการหาโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สองตามวิธีการต่อไปนี้

ขั้นตอนการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

1. จากบทนิยาม คือหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน โดย $f'(x) = 0$
2. แก้สมการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ได้ค่าวิกฤต ณ จุด x ใด ๆ
3. ทดสอบค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์จากค่าวิกฤต โดยการหา $f''(x)$ เช่น ถ้าได้ ค่าวิกฤต $x = a$ และพิจารณาดังนี้

3.1 ถ้า $f''(a) < 0$ แล้ว $f(a)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ณ จุด a

3.2 ถ้า $f''(a) > 0$ แล้ว $f(a)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ณ จุด a

3.3 ถ้า $f''(a) = 0$ ไม่สามารถสรุปได้ว่าเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ซึ่งจะต้องกลับไปใช้วิธีการหาแบบอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

ตัวอย่าง 3.9 จงหาค่าและจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

1. จากบทนิยาม $f'(x) = 0$

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

หาร 3 ตลอดทั้งสมการ $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

2. ค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤต $\therefore\ x = -3, 1$
3. ทดสอบค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์จากค่าวิกฤต โดยการหา $f''(x) = 6x + 6$

   นำค่า $x = -3, 1$ แทนใน $f''(x)$

- พิจารณา ค่าวิกฤต $x = -3$

$$f''(-3) = 6(-3) + 6 = -12 < 0$$

ดังนั้น $f''(-3)$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 1$$

$$= -27 + 3(9)^2 + 27 + 1 = 28$$

- พิจารณา ค่าวิกฤต $x = 1$

$$f''(1) = 6(1) + 6 = 12 > 0$$

ดังนั้น $f''(1)$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ

$$f(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 9(1) + 1$$

$$f(1) = 1 + 3 - 9 + 1 = -4$$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 28 และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (– 3, 28)

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ – 4 และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ (1, – 4)

ตัวอย่าง 3.10 จงหาค่าและจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2e^{-x}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x) = x^2e^{-x}(-1) + e^{-x}(2x)$$

$$= -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$$

1. จากบทนิยาม $f'(x) = 0$

$$-x^2e^{-x} + 2xe^{-x} = 0$$

$$xe^{-x}(-x+2) = 0$$

$$xe^{-x}(2-x) = 0$$

$$x = 0,\ 2$$

2. ค่า x ที่ทำให้เกิดจุดวิกฤต $\therefore \quad x = 0,\ 2$

3. ทดสอบค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์จากค่าวิกฤต โดยการหา

$$f''(x) = xe^{-x}(-1) + (2-x)\left(xe^{-x}(-1) + e^{-x}\right)$$

$$= -xe^{-x} + (2-x)\left(e^{-x} - xe^{-x}\right)$$

- พิจารณา ค่าวิกฤต $x = 0$

$$f''(0) = -(0)e^{-0} + (2-0)\left(e^{-0} - (0)e^{-0}\right)$$

$$= 0 + 2(1-0)$$

$$= 2 > 0$$

ดังนั้น $f''(0)$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ

$$f(0) = 0^2e^{-0}$$

$$f(0) = 0(1)$$

$$= 0$$

- พิจารณา ค่าวิกฤต $x = 2$

$$f''(2) = -2e^{-2} + (2-2)\left(e^{-2} - 2e^{-2}\right)$$

$$= -2e^{-2} < 0$$

ดังนั้น $f''(2)$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือ

$$f(2) = 2^2 e^{-2}$$

$$= 4e^{-2}$$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ 0 และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (0, 0)

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ 2 และจุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(2,\ 4e^{-2})$

3.4 การประยุกต์ใช้ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

การหาความสัมพันธ์ของสมการต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยอนุพันธ์ ซึ่งโจทย์ประยุกต์ที่กำหนดให้จะต้องทำการสร้างสมการและวาดรูปประกอบตามเงื่อนไข เพื่อแสดงถึงความสัมพันธ์ได้ง่ายขึ้น แล้วกำหนดตัวแปรให้กับปริมาณต่าง ๆ ถ้ามีตัวแปรมากกว่า 1 ตัวแปร จะต้องทำให้เหลือตัวแปรเดียวโดยอาศัยเงื่อนไขจากโจทย์และสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรให้เหลือเพียงสมการเดียวของสิ่งที่โจทย์ต้องการ จึงนำมาทดสอบหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 3.11 จงหาจำนวน 2 จำนวนซึ่งเป็นจำนวนเต็มที่มีค่าต่างกัน 10 และผลคูณของเลขทั้ง 2 จำนวน มีค่าน้อยที่สุด

<u>วิธีทำ</u> ให้ x เป็นเลขจำนวนที่ 1

$\therefore\ x-10$ เป็นเลขจำนวนที่ 2

ให้ y เป็นผลคูณของเลขทั้ง 2 จำนวน

ดังนั้น $y = x(x-10) = x^2 - 10x$

พิจารณาหาค่า x ซึ่งเป็นค่าวิกฤตจาก $y' = 0$

จะได้ $y' = 2x - 10$

$$2x - 10 = 0$$

$$2x = 10$$

$$\therefore\ x = 5$$

พิจารณาได้ 2 กรณี

- อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$y' < 0$		$y' > 0$
(-)	5	(+)

เครื่องหมายเปลี่ยนจากลบไปเป็นบวก แสดงว่าให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือพิจารณาอีกวิธีหนึ่งคือ

- อนุพันธ์อันดับสอง

$y'' = 2 > 0$ ให้ลักษณะเดียวกัน คือ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$\therefore$ จำนวนที่ 1 คือ $x = 5$ และจำนวนที่ 2 คือ $x - 10 = 5 - 10 = -5$

ดังนั้น 2 จำนวน คือ 5 และ -5

ตัวอย่าง 3.12 บริษัทแห่งหนึ่งต้องการทำกำไรมากที่สุดใน 1 เดือน จากการขายสินค้าชนิดหนึ่ง โดยตั้งราคาขายที่มีความสัมพันธ์ของยอดขายเป็นหน่วยต่อปี โดยมีค่าวัสดุเสื่อม 10,000 บาท ต้นทุนต่อชิ้นในการผลิตสินค้าและค่าขนส่งที่ 40 บาทต่อชิ้น และสมการของราคาขาย คือ $500 - 0.02x$ บาทต่อชิ้น บริษัทควรผลิตจำนวนกี่ชิ้นจึงจะมีกำไรมากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> ให้ x เป็นจำนวนของยอดขายมีหน่วยเป็นชิ้น

r เป็นฟังก์ชันของรายได้

c เป็นฟังก์ชันของต้นทุน

p เป็นฟังก์ชันของกำไร

สร้างสมการหาความสัมพันธ์

$$r(x) = (500 - 0.02x)x = 500x - 0.02x^2$$

$$c(x) = 10{,}000 + 40x$$

$$p(x) = 500x - 0.02x^2 - (10{,}000 + 40x) = -0.02x^2 + 460x - 10{,}000$$

พิจารณาหาค่า x ซึ่งเป็นค่าวิกฤตจากฟังก์ชันของกำไร $p'(x)=0$

จะได้ $-0.04x+460=0$

$$0.04x=460$$

$$x=\frac{460}{0.04}$$

$$\therefore \quad x=11{,}500 \text{ ชิ้น}$$

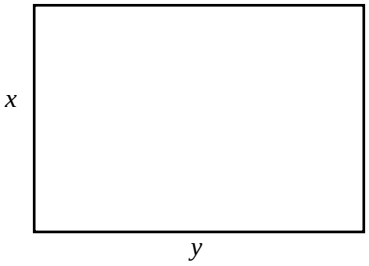
ดังนั้น บริษัทต้องผลิตสินค้า 11,500 ชิ้นต่อเดือน จึงจะมีกำไรมากที่สุด

ตัวอย่าง 3.13 จงหาขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่มากที่สุด โดยมีความยาวเส้นรูป 120 หน่วย

<u>วิธีทำ</u> ให้ A เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

x เป็นความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

y เป็นความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก



รูปที่ 3.16 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

หาความสัมพันธ์ได้จากโจทย์

ดังนั้น ความยาวเส้นรอบรูป $2x+2y=120$ (1)

พื้นที่ $A=xy$ (2)

จากสมการความยาวเส้นรอบรูปในสมการ (1) จะได้ $y=60-x$

และแทน y ในสมการที่ (2)

$$A=x(60-x)=60x-x^2$$

- ทดสอบหาค่าวิกฤตจากเงื่อนไขของโจทย์ที่มีพื้นที่มากที่สุด

$$A'=60-2x$$

- หาค่าวิกฤตจาก $A' = 0$

$$60 - 2x = 0$$
$$2x = 60$$
$$x = 30$$

จาก $y = 60 - x \therefore y = 60 - 30 = 30$

ดังนั้น ความกว้าง $x = 30$ และความยาว $y = 30$ คือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านละ 30 หน่วย ที่มีความยาวเส้นรอบรูป 120 หน่วย และมีพื้นที่มากที่สุดตามเงื่อนไข

ตัวอย่าง 3.14 การเกิดปฏิกิริยาเคมีระหว่างอุณหภูมิมีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส C ในการทดลองครั้งหนึ่งที่สัมพันธ์กับเวลา t มีหน่วยเป็นวินาทีตามสมการ $C(t) = 6t - 0.1t^2$ เมื่อเวลาที่เท่าใดอุณหภูมิจะขึ้นสูงสุดและอุณหภูมิสูงสุดมีค่าเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> จากความสัมพันธ์ของสมการ $C(t) = 6t - 0.1t^2$

- ทดสอบหาค่าวิกฤตจาก $C'(t) = 6 - 0.2t$
- หาค่าวิกฤตจาก $C'(t) = 0$

$$6 - 0.2t = 0$$
$$0.2t = 6$$
$$t = \frac{6}{0.2}$$
$$= 30 \text{ วินาที}$$

ดังนั้น เมื่อเวลา 30 วินาที อุณหภูมิจะขึ้นสูงสุด $C(30) = 6(30) - 0.1(30)^2$

$$= 180 - 0.1(900)$$
$$= 180 - 90$$
$$= 90 \text{ องศาเซลเซียส}$$

$\therefore$ เมื่อเวลา 30 วินาที อุณหภูมิจะขึ้นสูงสุด 90 องศาเซลเซียส

3.5 ความเร็ว ความเร่ง (Velocity, Acceleration)

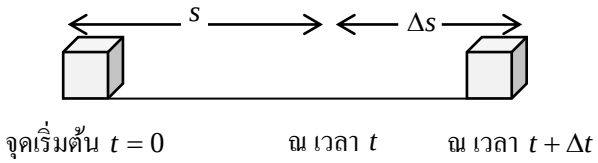
สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุมีหลายวิธีในทางฟิสิกส์ มีทั้งการเคลื่อนที่ในแนวที่เส้นตรง แนวดิ่ง และไม่ใช่เส้นตรง แต่จะกล่าวถึงเฉพาะความเร็ว ความเร่งการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรงและอัตราสัมพัทธ์ที่มีความสัมพันธ์ของอัตราส่วนของตัวแปรต่าง ๆ

3.5.1 ความเร็ว ความเร่ง

ความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางที่เกิดจากการเคลื่อนที่เป็นแนวตรงเทียบกับเวลา t ที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชัน $s(t)$ เรียกว่า “สมการของการเคลื่อนที่”

<u>การหาความเร็วและความเร่ง</u>

1. ความเร็ว (Velocity) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ของระยะทางเทียบกับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่



รูปที่ 3.17 อัตราการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

1.1 ความเร็วเฉลี่ย (Average velocity) คือ อัตราส่วนระหว่างระยะทางทั้งหมดที่เคลื่อนที่ได้หารด้วยเวลา

$$v_{avr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$
$$= \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

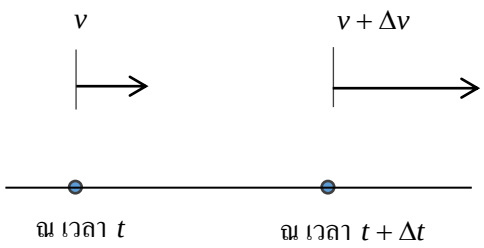
Δs คือ ระยะทางที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุจากที่หนึ่งไปอีกที่หนึ่ง

Δt คือ เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุ

1.2 ความเร็ว ณ ขณะเวลา t ใด ๆ หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous velocity) ของความเร็ว ซึ่งเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่มีค่าน้อยมาก หรือ Δt มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ $(\Delta t \to 0)$ หรืออนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$\begin{aligned} v_{avr} &= \frac{ds}{dt} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \\ &= s'(t) \end{aligned}$$

2. ความเร่ง (Acceleration) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเทียบกับเวลา



รูปที่ 3.18 อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

2.1 ความเร่งเฉลี่ย (Average acceleration) คือ อัตราส่วนระหว่างความเร็วที่เปลี่ยนไปทั้งหมดกับช่วงเวลาที่เปลี่ยนความเร็วนั้น

$$a_{avr} = \frac{dv}{dt}$$

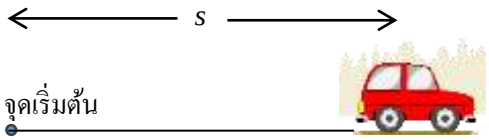
Δv คือ ความเร็วของวัตถุที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุจากที่หนึ่งไปอีกที่หนึ่ง

2.2 ความเร่ง ณ ขณะเวลา t ใด ๆ หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous velocity) ของความเร่ง ซึ่งเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่มีค่าน้อยมาก หรือ Δt มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ $(\Delta t \to 0)$ หรืออนุพันธ์อันดับสอง

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s'(t+\Delta t) - s'(t)}{\Delta t}$$
$$= s''(t)$$

ตัวอย่าง 3.15 รถยนต์คันหนึ่งเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงตามสมการของการเคลื่อนที่โดยที่ความสัมพันธ์กับเวลา t คือ $s(t) = 3t^3 + t^2 - 5$ เมตร จงหา

1. ระยะทาง ขณะเวลาที่ 3 วินาที
2. ความเร็ว ขณะเวลาที่ 3 วินาที
3. ความเร่ง ขณะเวลาที่ 3 วินาที



รูปที่ 3.19 การเคลื่อนที่ของรถยนต์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

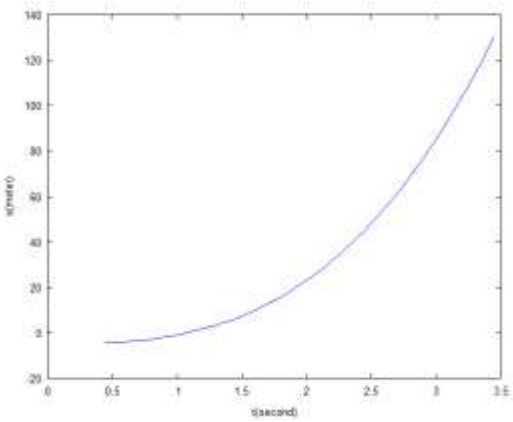
<u>วิธีทำ</u> 1. ระยะทางขณะ $t = 3$

จาก $s(t) = 3t^3 + t^2 - 5$

$= 3(3)^3 + 3^2 - 5$

$= 3(27) + 9 - 5$

$= 85$ เมตร



รูปที่ 3.20 กราฟของระยะทาง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

2. ความเร็วขณะ $t = 3$

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ หรือ } s'$$

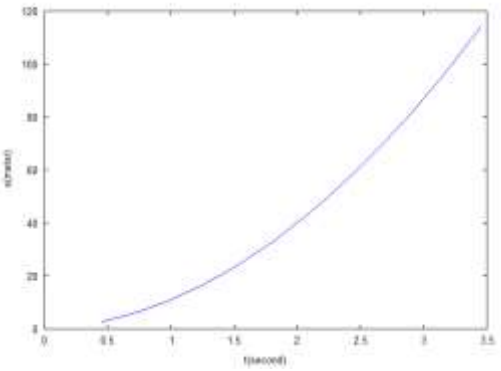
$$= \frac{d}{dt}\left(3t^3 + t^2 - 5\right)$$

$$s'(t) = 9t^2 + 2t$$

$$s'(3) = 9(3)^2 + 2(3)$$

$$= 9(9) + 6$$

$$= 87 \text{ เมตรต่อวินาที}$$



รูปที่ 3.21 กราฟของความเร็ว

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

3. ความเร่งขณะ $t = 3$

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ หรือ } s''$$

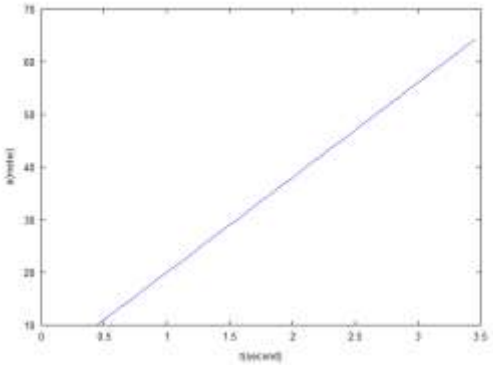
$$= \frac{d}{dt}\left(9t^2 + 2t\right)$$

$$s''(t) = 18t + 2$$

$$s''(3) = 18(3) + 2$$

$$= 54 + 2$$

$$= 56 \text{ เมตรต่อวินาที}^2$$

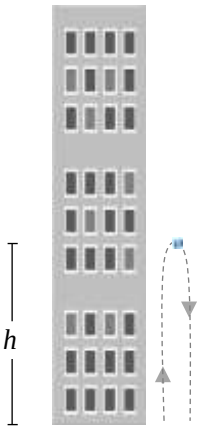


รูปที่ 3.22 กราฟของความเร่ง

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

ตัวอย่าง 3.16 ลูกแก้วลูกหนึ่งถูกโยนขึ้นไปในอากาศด้วยความเร็ว 30 เมตรต่อวินาที ตามแนวดิ่ง และสมการของการเคลื่อนที่ของลูกแก้วซึ่งเป็นความสูงจากพื้นดิน $h(t) = -8t^2 + 56t$ เมตร จงหา

1. ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t = 2$ ถึง 4 วินาที
2. ความเร็ว ขณะเวลาที่ $t = 3$ วินาที
3. ระยะทางที่ลูกแก้วขึ้นไปสูงสุด
4. เวลาเท่าใดที่ลูกแก้วขึ้นไปได้สูงเป็นระยะทาง 80 เมตร



รูปที่ 3.23 การเคลื่อนที่แนวดิ่ง
ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

<u>วิธีทำ</u> 1. ความเร็วเฉลี่ย v_{arv} ในช่วงเวลา $t = 2$ ถึง 4 วินาที

$$v_{arv} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$
$$= \frac{\Delta h}{\Delta t}$$
$$= \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

$$h(4) = -8(4)^2 + 56(4)$$
$$= -128 + 224$$
$$= 96$$

$$h(2) = -8(2)^2 + 56(2)$$
$$= -32 + 112$$
$$= 80$$

$$\therefore \quad v_{avr} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2}$$
$$= \frac{96 - 80}{2}$$
$$= \frac{16}{2}$$

$= 8$ เมตรต่อวินาที

ดังนั้น ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t = 2$ ถึง 4 วินาที คือ 8 เมตรต่อวินาที

2. ความเร็ว ขณะเวลาที่ $t = 3$ วินาที

จาก $v = \frac{ds}{dt}$ หรือ $s'(t)$

$$h'(t) = -16t + 56$$

$$\therefore \quad h'(t) = -16(3) + 56$$

$$= -48 + 56$$

$$= 8 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

ดังนั้น ความเร็ว ขณะเวลาที่ $t = 3$ วินาที คือ 8 เมตรต่อวินาที

3. ระยะทางที่ลูกแก้วขึ้นไปสูงสุด (ก้อนหินจะมีความเร็วเป็นศูนย์หรือ $v = 0$)

จาก $v = \frac{ds}{dt}$ หรือ $s'(t)$ มีค่าเท่ากับ 0

$$h'(t) = 0$$

$$-16t + 56 = 0$$

$$16t = 56$$

$$\therefore \quad t = \frac{56}{16} = 3.5 \text{ วินาที}$$

แทนค่า $t = 3.5$ ในสมการการเคลื่อนที่ $h(t) = -8t^2 + 56t$

$$h(3.5) = -8(3.5)^2 + 56(3.5)$$

$$= 98 + 196$$

$$= 294 \text{ เมตร}$$

ดังนั้น ระยะทางที่ลูกแก้วขึ้นไปสูงสุด คือ 294 เมตร

4. เวลาเท่าใดที่ลูกแก้วขึ้นไปได้สูงเป็นระยะทาง 80 เมตร ($h = 80$)

จาก $$h(t) = -8t^2 + 56t$$

$$80 = -8t^2 + 56t$$

$$8t^2 - 56t + 80 = 0$$

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

$$(t-2)(t-5) = 0$$

$$t = 2,\ 5$$

3.5.2 อัตราสัมพัทธ์ (Related rates)

อัตราสัมพัทธ์ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณใด ๆ เมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของเวลา โดยถ้าตัวแปร x เป็นฟังก์ชันของปริมาณใด ๆ (เช่น พื้นที่, ปริมาตร หรือน้ำหนัก) ของเวลา t แล้วอัตราสัมพัทธ์ x คือ $\frac{dx}{dt}$ โดยตัวแปรที่สัมพันธ์ของปริมาณอาจมีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 ตัวขึ้นไปในสมการ และใช้กฎลูกโซ่ เพื่อใช้แก้ปัญหาในการคำนวณ

หมายเหตุ ถ้าเวลาผ่านไป t เพิ่มขึ้น และ

- ค่าตัวแปร x เพิ่ม จะได้ $\frac{dx}{dt}$ เป็นบวก (+)
- ค่าตัวแปร x ลด จะได้ $\frac{dx}{dt}$ เป็นลบ (-)

ตัวอย่าง 3.17 เครื่องเล่นดิ่งหอคอย (Space tower) เคลื่อนที่ขึ้นในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 250 เมตรต่อวินาที โดยมีกล้องวีดีโอบันทึกภาพตั้งอยู่ห่างจากฐานด้านล่างของเครื่องเล่น 120 เมตร จงหาว่าระยะทางระหว่างกล้องบันทึกวีดีโอบันทึกภาพกับเครื่องเล่นจะเปลี่ยนไปด้วยอัตราเร็วเท่าใด ขณะที่เครื่องเล่นอยู่สูง 160 เมตร

<u>วิธีทำ</u> ต้องการหา $\frac{ds}{dt}$ เมื่อเครื่องเล่นมีความสูงอยู่ที่ 160 เมตร

ให้ s เป็นระยะทางระหว่างกล้องและเครื่องเล่น

ให้ y เป็นความสูงของเครื่องเล่น

หาความสัมพันธ์ของรูป(โดยใช้ทฤษฎีบทปีทาโกรัส)

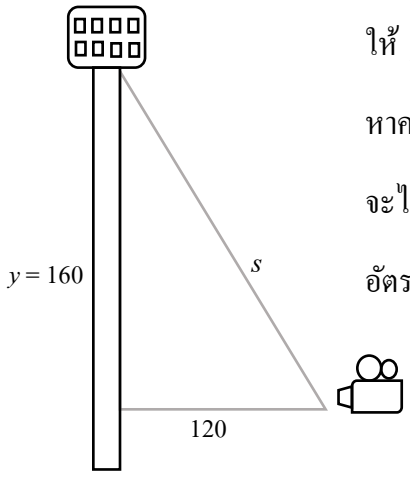
จะได้สมการ $$s^2 = 120^2 + y^2 \qquad (1)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราเร็วของระยะทางเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ

$$2s\frac{ds}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$$

$$s\frac{ds}{dt} = y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{y}{s}\frac{dy}{dt} \qquad (2)$$



รูปที่ 3.24 การเคลื่อนที่ของเครื่องเล่นดิ่งหอคอย

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

โจทย์กำหนดให้ความเร็วที่เคลื่อนที่ในแนวดิ่ง 250 เมตรต่อวินาที

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = 250 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

ความสูงของเครื่องเล่น 160 เมตร

$$\therefore \quad y = 160 \text{ เมตร}$$

ระยะทางของกล้องบันทึกภาพและเครื่องเล่น

จากสมการที่ (1) $$s^2 = 120^2 + 160^2$$

$$s^2 = 14{,}400 + 25{,}600 = 40{,}000$$

$$\therefore \quad s = \sqrt{40{,}000} = 200 \text{ เมตร}$$

แทนค่า s , y และ $\frac{dy}{dt}$ ในสมการ (2)

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt} = \frac{160}{200}(250) = 200 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

ดังนั้น ขณะที่เครื่องเล่นอยู่สูง 160 เมตร และระยะทางระหว่างเครื่องเล่นกับกล้องห่างกัน 120 เมตร จะเปลี่ยนไปด้วยอัตราเร็ว 200 เมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.18 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเมื่อบรรจุแก๊สฮีเลียมใส่ในลูกโป่งทรงกลมด้วยอัตราเร็ว 5 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที โดยที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร

<u>วิธีทำ</u> ให้ r เป็นรัศมีของลูกโป่ง

v เป็นปริมาตรของลูกโป่ง

รูปที่ 3.25 ลูกโป่งที่บรรจุแก๊สฮีเลียม

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

หาความสัมพันธ์จากปริมาตรของทรงกลม เพื่อหาอัตราการเปลี่ยนแปลง

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\right)\frac{dr}{dt}$$

$\therefore$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเมื่อเวลา t ใด ๆ

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

โจทย์กำหนดให้ $r = 10$ เซนติเมตร และ $\frac{dv}{dt} = 5$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที

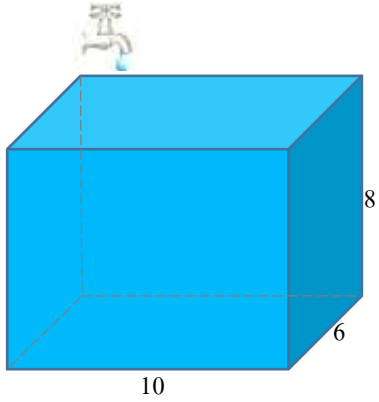
จากสมการที่ (1)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(10)^2}(5)$$

$$= \frac{1}{80\pi} \quad \text{เซนติเมตรต่อวินาที}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี มีค่า $\frac{1}{80\pi}$ เซนติเมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.19 อ่างเก็บน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก เมื่อทำการบรรจุน้ำลงไปด้วยอัตราการไหลเข้า 15 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที ถ้าอ่างเก็บน้ำมีฐานกว้าง 6 เมตร ยาว 10 เมตร และสูง 8 เมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำที่สูงขึ้นเป็นเท่าใด



รูปที่ 3.26 อ่างเก็บน้ำทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

<u>วิธีทำ</u> ให้ v เป็นปริมาตรของอ่างเก็บน้ำ

h เป็นความสูงของอ่างเก็บน้ำ

หาความสัมพันธ์จากปริมาตรทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$V = \text{กว้าง} \times \text{ยาว} \times \text{สูง}$$

$$= 6 \times 10 \times h$$

$$= 60h$$

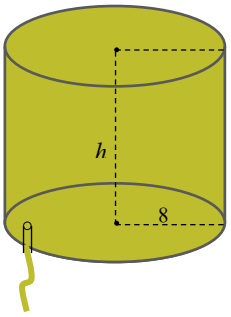
$$\frac{dv}{dt} = 60\frac{dh}{dt} \qquad (1)$$

โจทย์กำหนดให้ $\frac{dv}{dt} = 6$ จากสมการที่ (1) จะได้ $6 = 60\frac{dh}{dt}$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำ เมื่อเวลา t ใด ๆ $\frac{dh}{dt} = 0.1$ เมตรต่อนาที

หรือ10 เซนติเมตรต่อนาที

ตัวอย่าง 3.20 ถังโลหะทรงกระบอกสำหรับเก็บน้ำมันมีจุดรั่ว ซึ่งทำให้น้ำมันไหลออกไปด้วยอัตรา 16 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที โดยถังมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 เซนติเมตร จงหาอัตราการไหลออกของน้ำมันจะลดลงเท่าใด



รูปที่ 3.27 ถังโลหะทรงกระบอก

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

<u>วิธีทำ</u> ให้ v เป็นปริมาตรของทรงกระบอก

h เป็นปริมาตรของทรงกระบอก

r เป็นรัศมีของทรงกระบอก

หาความสัมพันธ์จากปริมาตรทรงกระบอก

$$v = \pi r^2 h \qquad \text{โดย } r = 8$$

$$= 64\pi h$$

$$\frac{dv}{dt} = 64\pi \frac{dh}{dt} \qquad \text{โดย } \frac{dv}{dt} = -16$$

$$-16 = 64\pi \frac{dh}{dt}$$

$\therefore$ อัตราการไหลออกของน้ำมัน เมื่อเวลา t ใด ๆ

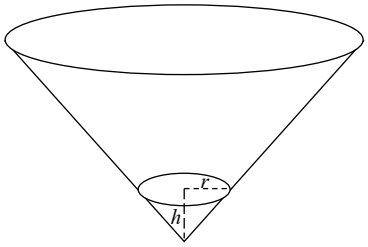
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{16}{64\pi}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}$$

ดังนั้น อัตราการไหลออกของน้ำมันจะลดลง $\frac{1}{4\pi}$ เซนติเมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.21 กรวยกลมซึ่งทำมุม 45 องศาในแนวดิ่ง โดยมีอัตราคงที่ของปริมาตรน้ำอยู่ที่ 30 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที เมื่อความสูงของน้ำที่ระดับ 60 เซนติเมตร จงหา

1. อัตราความสูงของน้ำที่เพิ่มขึ้นต่อวินาที
2. อัตรารัศมีพื้นผิวของน้ำที่เพิ่มขึ้นต่อวินาที
3. อัตราพื้นที่ผิวของน้ำที่เพิ่มขึ้นต่อวินาที



รูปที่ 3.28 กรวยกลม

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

<u>วิธีทำ</u> ให้ h เป็นความสูงของน้ำ

r เป็นรัศมีพื้นผิวของน้ำ

A เป็นพื้นที่ผิวของน้ำ

V เป็นปริมาตรของน้ำ

หาความสัมพันธ์ได้จากสูตร

- ปริมาตรของกรวยกลม $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (1)

- พื้นที่ผิว $A = \pi r^2$ (2)

เนื่องจากกรวยกลมทำมุม 45 องศา ดังนั้น $r = h$

จากสมการ (1) จะได้

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi h^2$$

1. อัตราความสูงของน้ำเมื่อเทียบกับเวลา คือ $\frac{dh}{dt}$

โดยใช้กฎลูกโซ่

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \times \frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{1}{\pi h^2} \times 30$$

$$= \frac{30}{\pi h^2}$$

เมื่อ $h = 60$ $\therefore$ อัตราความสูงของน้ำเมื่อเทียบกับเวลา คือ

$$\frac{30}{\pi h^2} = \frac{30}{\pi (60)^2}$$

$$= \frac{30}{\pi (3{,}600)}$$

$$= \frac{1}{120\pi} \text{ เซนติเมตรต่อวินาที}$$

2. อัตรารัศมีพื้นผิวของน้ำเมื่อเทียบกับเวลา คือ $\frac{dr}{dt}$

จากสมการ (2) จะได้ $$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

เนื่องจาก $r = h$ เมื่อ $h = 60$

$\therefore$ อัตรารัศมีพื้นผิวน้ำเทียบกับเวลา คือ $\frac{1}{120\pi}$ เซนติเมตรต่อวินาที

3. อัตราพื้นที่ผิวของน้ำเมื่อเทียบกับเวลา คือ $\frac{dA}{dt}$

โดยใช้กฎลูกโซ่ $$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \times \frac{30}{\pi r^2}$$

$$= \frac{60}{r}$$

เมื่อ $r = 60$

$\therefore$ อัตราพื้นที่ผิวน้ำเทียบกับเวลา คือ $\frac{60}{r}$ ตารางเซนติเมตรต่อวินาที

3.6 การประยุกต์อนุพันธ์เกี่ยวกับรูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate forms) และกฎโลปิตาล (L'Hopital's rule)

การหาลิมิตของฟังก์ชันในบทที่ 1 ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าได้หรือไม่ ถ้าอยู่ในรูปแบบ $\frac{0}{0}, \pm\frac{\infty}{\infty}$ หรือรูปแบบอื่นๆ ซึ่งเป็นลักษณะที่บอกไม่ได้เช่นกัน คือ $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 และ 1^∞ เรียกรูปแบบลักษณะนี้ว่า "รูปแบบไม่กำหนด" ในการหาค่าของรูปแบบดังกล่าว สามารถทำได้โดยใช้ กฎโลปิตาล

<u>**วิธีการใช้กฎโลปิตาล**</u> มีดังนี้

1. รูปแบบ $\frac{0}{0}, \pm\frac{\infty}{\infty}$

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันของ x และ a เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $\lim_{x\to a} f(x)=0$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=0$ หรือ $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

เมื่อ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้ หรือไม่เป็นค่าอนันต์

ถ้า $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ยังอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\pm\frac{\infty}{\infty}$ อีก ให้ใช้กฎโลปิตาลซ้ำอีกจนกระทั่งได้ค่า $\lim_{x\to a} f^{(n)}(x)$ และ $\lim_{x\to a} g^{(n)}(x)$ ไม่เป็นศูนย์ หรือ $\pm\infty$ พร้อมกัน โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\ldots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$

ตัวอย่าง 3.22 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\frac{0}{\sin 0}=\frac{0}{0}$

เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\frac{0}{0}$ จึงสามารถใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(x)}{\frac{d}{dx}(\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos 0}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

ตัวอย่าง 3.23 จงหาค่าของ $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{3-\sqrt{\cos\theta+9}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{3-\sqrt{\cos\theta+9}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \dfrac{3-\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+9}}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$

$$= \frac{3-\sqrt{0+9}}{0}$$

$$= \frac{3-\sqrt{9}}{0}$$

$$= \frac{3-3}{0}$$

$$= \frac{0}{0}$$

เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\frac{0}{0}$ จึงสามารถใช้กฎโลปิตาลได้

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{3-\sqrt{\cos\theta+9}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d}{dx}(3-\sqrt{\cos\theta+9})}{\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{0-\frac{1}{2}(\cos\theta+9)^{-\frac{1}{2}}(-\sin\theta)}{(0-1)}$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{2}(\cos\theta+9)^{-\frac{1}{2}}(-\sin\theta)}{-1}$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}(\cos\theta+9)^{-\frac{1}{2}}(\sin\theta)$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin\theta}{2(\cos\theta+9)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{3-\sqrt{\cos\theta+9}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin\theta}{2\sqrt{\cos\theta+9}}$$

$$= -\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+9}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{0+9}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{9}}$$

$$= -\frac{1}{2(3)}$$

$$= -\frac{1}{6}$$

ตัวอย่าง 3.24 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{5^x-1}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{5^x-1} = \dfrac{1-e^{-0}}{5^0-1} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$

เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\dfrac{0}{0}$ จึงสามารถใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{5^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1-e^{-x})}{\frac{d}{dx}(5^x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0-e^{-x}(-1)}{5^x \ln 5 - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{5^x \ln 5}$$

$$= \frac{e^{-0}}{5^0 \ln 5} = \frac{1}{\ln 5}$$

ตัวอย่าง 3.25 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2-5x+1}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2-5x+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$

เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\dfrac{\infty}{\infty}$ จึงสามารถใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^2-5x+1} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2-5x+1)}$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{2x-5}$$

$= \dfrac{\infty}{\infty}$ ยังคงเป็นรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\dfrac{\infty}{\infty}$ จึงต้องใช้กฎโลปิตาลซ้ำ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(2x-5)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}$$

$$=\infty$$

ตัวอย่าง 3.26 จงหาค่าของ $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\ln(\sin\theta)}{\ln(\tan\theta)}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\ln(\sin\theta)}{\ln(\tan\theta)}=\frac{\ln(\sin 0)}{\ln(\tan 0)}=\frac{\infty}{\infty}$

เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\frac{\infty}{\infty}$ จึงสามารถใช้กฎโลปิตาลได้

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\ln(\sin\theta)}{\ln(\tan\theta)}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\frac{d}{d\theta}(\ln(\sin\theta))}{\frac{d}{d\theta}(\ln(\tan\theta))}$$

$$\therefore\quad \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\ln(\sin\theta)}{\ln(\tan\theta)}=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)}{\frac{1}{\tan\theta}\frac{d}{d\theta}(\tan\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sec^2\theta}{\tan\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\sec^2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0^+}\cos^2\theta$$

$$=1$$

2. รูปแบบไม่กำหนดอื่น ๆ ที่อยู่ในรูปแบบ $0(\infty)$, $\infty-\infty$ โดยจำเป็นที่จะต้องจัดให้อยู่ใน

รูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\pm\frac{\infty}{\infty}$ ก่อน จึงสามารถทำการใช้กฎโลปิตาลได้

ตัวอย่าง 3.27 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0(\infty)$ เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $0(\infty)$ ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป $\frac{\infty}{\infty}$ และใช้กฎโลปิตาลได้

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.28 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \sin 2x \cot x$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0} \sin 2x \cot x = 0(\infty)$ เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $0(\infty)$ ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป $\frac{\infty}{\infty}$ และใช้กฎโลปิตาลได้

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \lim_{x\to 0} \sin 2x \cot x &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\sin 2x)}{\frac{d}{dx}(\tan x)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\sin 2x\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{\sec^2 x}$$

$$= 2$$

ตัวอย่าง 3.29 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x) = \infty - \infty$ เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\infty - \infty$ ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ และใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{\frac{d}{dx}(\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{\sin x}$$

$$= 0$$

ตัวอย่าง 3.30 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \infty - \infty$ เป็นลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แบบ $\infty - \infty$ ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ และใช้กฎโลปิตาลได้

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-x^{-2}\right)}{\left(-x^{-2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

3. รูปแบบไม่กำหนดอื่นๆ ที่อยู่ในรูปแบบ 0^0, ∞^0 หรือ 1^∞ โดยจำเป็นที่จะต้องจัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\pm\frac{\infty}{\infty}$ ก่อน จึงสามารถทำการใช้กฎโลปิตาลได้

ตัวอย่าง 3.31 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = 0^0$ ซึ่งจะต้องจัดให้อยู่ในรูปที่สามารถใช้กฎโลปิตาลได้ โดยการใส่ ln เพื่อกำจัดกำลังให้ $y = x^{x^2}$

$$\ln y = \ln x^{x^2}$$

$$= x^2(\ln x) = 0(\infty) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+} (\ln y) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} y = e^0$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = 1$

ตัวอย่าง 3.32 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{2x}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{2x} = \infty^0$ ซึ่งจะต้องจัดให้อยู่ในรูปที่สามารถใช้กฎโลปิตาลได้ โดยการใส่ ln เพื่อกำจัดกำลังให้ $y = \left(\frac{1}{x}-1\right)^{2x}$

$$\ln y = \ln\left(\frac{1}{x}-1\right)^{2x}$$

$$= 2x \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

$$= 2\,\frac{\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\frac{\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\frac{\frac{1}{\left(\frac{1-x}{x}\right)}\left(\frac{-x-(1-x)}{x^2}\right)}{-x^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1-x}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(\ln y) = 0$$

$$y = e^0 = 1$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{2x} = 1$

ตัวอย่าง 3.33 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)^x$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)^x = 1^\infty$ ซึ่งจะต้องจัดให้อยู่ในรูปที่สามารถใช้กฎโลปิตาลได้ โดยการใส่ ln เพื่อกำจัดกำลังให้ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)^x$

$$\ln y = \ln\left(1+\frac{9}{x}\right)^x$$

$$= x\ln\left(1+\frac{9}{x}\right)$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{9}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(\ln y) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{9}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\ln\left(1+\frac{9}{x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{9}{x}\right)}\left(\frac{-9}{x^2}\right)}{-x^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{9}{\left(1+\frac{9}{x}\right)} = 9$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(\ln y) = 9$$

$$y = e^9$$

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)^x = 9$

บทสรุป

การประยุกต์อนุพันธ์ หากพิจารณาร่วมกับบทที่ผ่านมา สามารถนำมาต่อยอดใช้คำนวณแก้ไขโจทย์ปัญหาในการหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชันได้ โดยนำไปหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเพื่อหาค่าวิกฤตที่ทำให้มีค่าต่ำสุดหรือสูงสุดตามเงื่อนไข แล้วจะได้คำตอบของสมการหรือฟังก์ชันนั้น ๆ และนำไปสรุปผลในสาขาวิชาต่าง ๆ ได้ เช่น

1. การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของก๊าซ แก๊ส การไหลต่าง ๆ ของสารเคมี ทางเคมี
2. การคำนวณหาความเร็ว ความเร่ง ทางฟิสิกส์
3. การหาอัตราการเกิด การเจริญเติบโต การตาย ทางชีววิทยา
4. การหาการเปลี่ยนแปลงของเวลาในการประมวลผลของโปรแกรม ทางคอมพิวเตอร์
5. การหาจุดคุ้มทุน กำไร ขาดทุน ทางด้านบริหารธุรกิจหรือเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. จงหาจุดวิกฤต ค่าต่ำสุดหรือสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 1$

1.2 $f(x) = x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$

1.3 $f(x) = 4x^3$

1.4 $f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 18x + \frac{3}{2}$

1.5 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$

1.6 $f(x) = x + \frac{4}{x}$

1.7 $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

2. โยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศ ความสัมพันธ์ระหว่างที่ลูกบอลอยู่ห่างจากพื้นดิน s เมตรหลังจากโยนลูกบอลขึ้นไป t วินาที เป็นไปตามสมการ จงหาระยะทางที่ลูกบอลขึ้นไปได้สูงสุด

3. กระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 10 ซม. ต้องการตัดมุมทั้งสี่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ x ซม. แล้วพับตามรอยเส้นประเพื่อเชื่อมทำกล่องฝาเปิดดังรูป x ควรจะมีค่าเท่าไร กล่องจึงจะมีปริมาตรมากที่สุด และมีปริมาตรมากที่สุดเท่าไร

4. พ่อค้าคนหนึ่งทราบว่าถ้าเขาตั้งราคาสินค้าอย่างหนึ่งชิ้นละ 20 บาท ในหนึ่งสัปดาห์เขาจะขายสินค้าได้ 1,000 ชิ้น ถ้าเขาลดราคาลงชิ้นละ 1 บาท เขาจะขายสินค้าได้เพิ่มอีก 100 ชิ้นเป็น 1,100 ชิ้น ถ้าเขาลดราคาลงชิ้นละ 2 บาท เขาจะขายสิ้นค้าได้เพิ่มอีก 200 ชิ้น เป็น 1,200 ชิ้น ถ้าเป็นเช่นนี้เรื่อย ๆ ไ ป เขาควรจะตั้งราคาสินค้าเท่าไรจึงจะมีเงินจากการขายมากที่สุด

5. ต้องการนำเชือกที่มีความยาว 160 เมตร ไปล้อมรอบที่ดินเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เพื่อให้ได้พื้นที่มากที่สุด จงหาความกว้างและความยาวในการล้อมรอบที่ดิน

6. กล่องใบหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง โดยมีสมการการเคลื่อนที่ $s = \frac{2}{3}t^3 + 3t - 5$ หน่วย จงหาความเร็วและความเร่งของกล่อง เมื่อเวลาผ่านไป 3 นาที

7. ถ้าระยะทางที่รถยนต์เคลื่อนที่เมื่อเวลา t ใดๆ ตามสมการ $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ โดยที่ s มีหน่วยเป็นกิโลเมตร และ t มีหน่วยเป็นนาที จงหา

7.1 ระยะทางและความเร่ง เมื่อความเร็วมีค่าเป็นศูนย์

7.2 ระยะทางและความเร่ง เมื่อความเร่งมีค่าเป็นศูนย์

8. บันไดหนึ่งยาว 5 เมตร โดยปลายด้านบนพิงกำแพงแต่เกิดการลื่นไถล ปลายด้านล่างของบันไดอยู่บนพื้นดินเคลื่อนไถลห่างออกจากกำแพง 3 เมตร ด้วยความเร็ว 2 เมตรต่อวินาที ในขณะที่ปลายด้านล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพงเป็นระยะทาง 3 เมตร จงหาว่าปลายด้านบนจะเคลื่อนลงที่ขอบกำแพงด้วยความเร็วเท่าใด

9. ในการแข่งขันการก่อกองทรายเป็นรูปเจดีย์ ซึ่งเททรายบนยอดด้วยความเร็ว 3 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที โดยที่กองทรายยังคงรูปเดิมและส่วนสูงของรัศมีจะเท่ากับรัศมีของฐานกองทราย จงหาว่าส่วนสูงของกองทรายจะเพิ่มขึ้นด้วยความเร็วเท่าใด ขณะที่กองทรายมีความสูง 6 ฟุต

10. แผ่นโลหะกลมเมื่อได้รับความร้อนจะขยายตัว โดยเส้นรอบวงจะยาวเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็ว 4 เซนติเมตรต่อนาที จงหาพื้นที่หน้าตัดของแผ่นโลหะจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด

11. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ โดยใช้กฎโลปิตาล

11.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x-2}{x^2+7}$

11.2 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$

11.3 $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-5x+1}{x^3+1}$

11.4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$

11.5 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}\cos x}{x}$

11.6 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

11.7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$

11.8 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

11.9 $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

11.10 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2^x}$

11.11 $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x^3}$

11.12 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}$

11.13 $\lim\limits_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{2x}$

11.14 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$

11.15 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$

11.16 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x}{\tan 3x}$

11.17 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}$

11.18 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$

11.19 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}+x^2}{e^x+4x}$

11.20 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$

11.21 $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

11.22 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

เอกสารอ้างอิง

กฤษณะ เนียมมณี. (2543). **แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ I**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

จินดา อาจริยะกุล. (2545). **อนุพันธ์และการประยุกต์**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ (2547). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นวลอนงค์ ตันตระกูล. (2543). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. กรุงเทพมหานคร: ว.เพ็ชรสกุล.

มนัส ประสงค์. (2535). **แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

ภิรดี ฤทธิเดช. (2560). **แคลคูลัสพื้นฐาน.** คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

วรรณา ไชยวิโน. (2535). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

วิรัตน์ สุวรรณาภิชาติ. (2555). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

วิริยะ ศิริชานนท์. (มปป). **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร.** คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1**. (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

อังสนา จั่นแดง และวิภาวรรณ สิงห์พริ้ง. (2545). **แคลคูลัส 1**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

อำพล ธรรมเจริญ. (2547). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 1**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). **Calculus for Scientists and Engineers.** (1st ed.). USA: Pearson Education, Inc.